第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

要点 ①　組合せ

「組合せ」… いくつかのものを，取り出す順序や並べる順序を区別せずに，取り出したものを 1 組にしたもの。

4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を選ぶ組合せは

{ ，　， }，{ ，　， }，{ ，　， }，{ ，　， }

の 4 通りである。

このように，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出す組合せを

「　　　　　　　　　　　　　　　　」

といい，その総数を「　　　」で表す。ただし，$r \leqq n$ である。

4 個から 3 個を取る組合せの総数は　　　と表され，上の例より

　　　$= 4$（通り）

である。

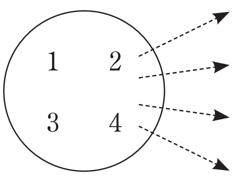
この組合せを，順列の総数を用いて求める。

4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を選んで 1 列に並べる順列の総数は

　　　通り

である。4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を選ぶ組合せは　　　通りであり，この ${}_4C_3$ 通りの組それぞれについて，選んだ異なる 3 個の数字を 1 列に並べる順列は　　通りである。

＜集合＞　　＜組合せ＞　　　　　　＜順列＞



{1，2，3}　→　123，132，213，231，312，321

{1，2，4}　→　124，142，214，241，412，421

{1，3，4}　→　134，143，314，341，413，431

{2，3，4}　→　234，243，324，342，423，432

よって，4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を選んで 1 列に並べる順列の総数は

　　　通り

である。

以上より，次の等式が成り立つ。

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = {}_4\mathrm{P}_3$$

この式を変形すると

$${}_4\mathrm{C}_3 = \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{3!}$$

となり，$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_3}{3!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 4$ と計算することができる。

同様に，n 個から r 個取って1列に並べる順列について，${}_n\mathrm{C}\quad \times \quad ! = {}_n\mathrm{P}$　が成り立つから

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

と表すことができ，${}_n\mathrm{C}_r$ は ${}_n\mathrm{P}_r$ を$r!$，すなわち「　　　　　　　　　　　　　　　」と考えることができる。

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}^{r\text{個}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{r\text{個}}} \qquad (r \leqq n)$$

例　6人から3人を選ぶ組合せの総数は

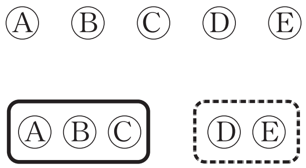
$$\quad = \frac{\quad}{\quad} = 20 \text{（通り）}$$

${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ であることを用いると，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = $　　　　　　と表される。

ただし，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定める。

要点② ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

5人から3人選ぶ組合せによって組を決めることは，選ばない2人を組合せによって決めるのと同じである。



よって ${}_5\mathrm{C}_3$　${}_5\mathrm{C}_2$ が成り立つ。

一般に，次の等式が成り立つ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

1 (1) 次の値を求めよ。

(i) ${}_{8}\mathrm{C}_{3}$　(ii) ${}_{6}\mathrm{C}_{4}$　(iii) ${}_{5}\mathrm{C}_{1}$

(2) 次のものの総数を求めよ。

(i) 10 人の生徒から 4 人を選ぶときの選び方。

(ii) 正六角形の 6 個の頂点のうち，3 点を結んでできる三角形の個数。

Point Pickup

組合せの総数

異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す組合せの総数は

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}\qquad(r\leqq n) $$

${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である。また，${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$ と定める。

${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ の性質

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出すことは，取り出さない $(n-r)$ 個を選ぶことと同じである。よって

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r} $$

が成り立つ。r が n の半分より大きいときに有効である。

第3講 PART1 確認問題

1 $_{7}C_{3}=$ アイ

2 $_{8}C_{6}=$ ウエ

3 $_{10}C_{1}=$ オカ

4 6人の生徒の中から2人を選ぶとき，選び方の総数は，

キ C ク ＝ ケコ (通り)である。

5 正五角形 ABCDE の5個の頂点から3個を選んで結び，三角形を作る。このような三角形は全部で サシ 個ある。

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1　(1)　次の値を求めよ。

(i)　${}_8C_3$　　(ii)　${}_6C_4$　　(iii)　${}_5C_1$

(2)　次のものの総数を求めよ。

(i)　10 人の生徒から 4 人を選ぶときの選び方。

(ii)　正六角形の 6 個の頂点のうち，3 点を結んでできる三角形の個数。

[解答]

(1)(i)　${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$　　(ii)　${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　　(iii)　${}_5C_1=5$

(2)(i)　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

(ii)　求める三角形の個数は，6 個から 3 個取る組合せの総数である。

よって ${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$（個）

第3講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：35

[解説]

$${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}$$ [A]

$$=35$$

[A]
$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

2

[正解] ウエ：28

[解説]

$${}_8C_6={}_8C_2$$ [B]

$$=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$$

[B]　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

3

[正解] オカ：10

[解説]

$${}_{10}C_1=10$$ [C]

[C]　${}_nC_1=n$

4

[正解] キ：6，ク：2，ケコ：15

[解説]

6人の生徒から2人を選ぶ方法は，6個のものから2個を選ぶ組合せの数に等しい。

つまり，${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}$ [D]

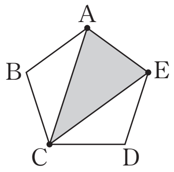
$=15$（通り）

[D]　異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す組合せの総数は，
$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$
$(r\leqq n)$

5 [正解] サシ：10

[解説]

三角形の個数は，5 個の文字から 3 個選ぶ組合せの数に等しい。[E]



つまり，$_5C_3 = {_5C_2}$

$$= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \mathbf{10}\ (\textbf{個})$$

[E] 3 点を選べば，選んだ 3 点を頂点とする三角形が 1 つ得られる